Seri bahan kuliah Algeo #20

Aljabar Quaternion

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Review Bilangan Kompleks

- Bilangan kompleks di R^2:

  $z = a + bi,$

  a adalah bagian riil

  b adalah bagian imajiner

  $i = \sqrt{-1}$ (sehingga $i^2 = -1$)

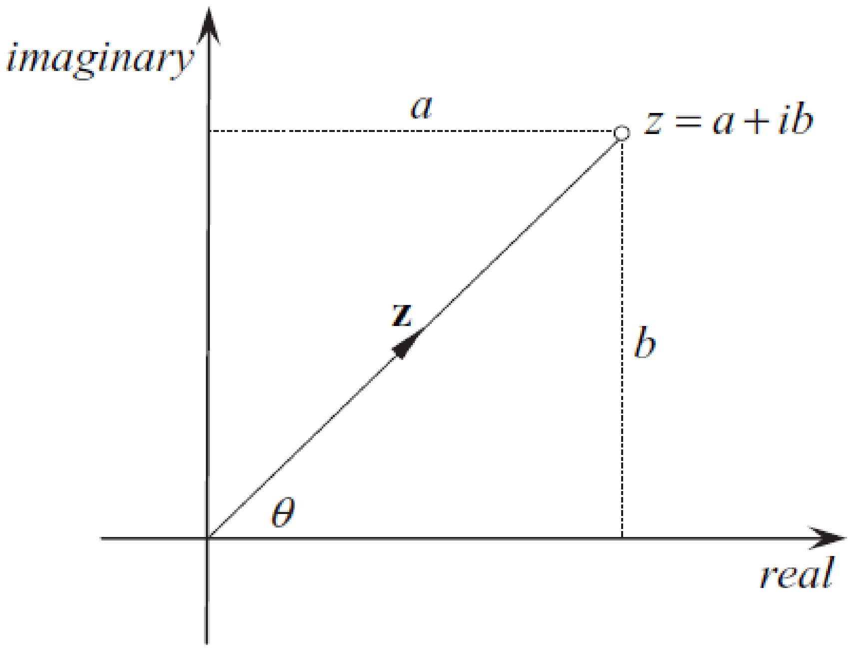
  Contoh: $z = 3 + 2i$, $z = 6 - 14i$, $z = 16 - 13i$, dsb

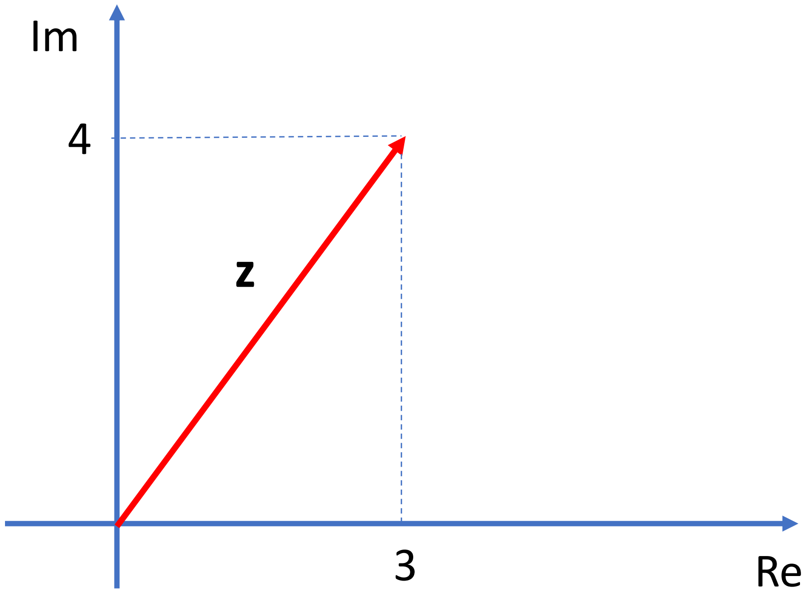
- Konyugasi (*conjugate*) suatu bilangan kompleks sering dinamakan bilangan sekawan, ditulis sebagai z*:

  $z^* = a - bi$

  Contoh: $z = 3 + 2i$, maka $z^* = 3 - 2i$

- Diagram Argand menyajikan z = a + bi sebagai vektor:





z = 3 + 4i

Panjang z disebut modulus bilangan kompleks, dilambangkan dengan |z| :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

- Penjumlahan dua bilangan kompleks:

$$\begin{array}{r} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \quad + \\ \hline z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \end{array}$$

- Perkalian dua bilangan kompleks:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) \quad &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \qquad (\text{karena } i^2 = -1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Bilangan Quaternion

- Ditemukan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1843.

- Hamilton mencoba memperluas bilangan kompleks di R^2 ke R^3:

$$z = a + bi + cj \qquad\qquad \text{(triplets)}$$

yang dalam hal ini, $i = j = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = j^2 = -1$

Contoh: $z = 3 + 4i - 5j$

- Namun, jika dua buah bilangan kompleks di R^3 dikalikan, meninggalkan masalah perkalian dua buah imajiner yang tidak terdefinisi, yaitu sbb:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) \\ &= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ja_1 c_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ijb_1 c_2 + jc_1 a_2 + jic_1 b_2 + j^2 c_1 c_2. \end{aligned}$$

Sulihkan $i^2 = j^2 = -1$ lalu susun ulang persamaan di atas menjadi:

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + ijb_1 c_2 + jic_1 b_2$$

Tetap meninggalkan perkalian *ij* dan *ji* yang tidak terdefinisi.

- Diceritakan bahwa putra Sir William Hamilton yang berusia 8 tahun bertanya kepadanya setelah sarapan pagi:

  “Well, Papa, can you multiply triplets?” (triplets: $z = a + bi + cj$)

  Hamilton menggeleng kepala dan dengan sedih berkata:

  “No, I can only add and subtract them.”

  Hamilton menjawab demikian karena dia tidak berhasil menemukan nilai perkalian *ij* dan *ji*.

- Hamilton tidak menyerah, lalu dia mencoba memperluas triplets menjadi quadruplets:

  $z = a + bi + cj + dk$

- Misalkan

$$z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$$

- Kalikan keduanya:

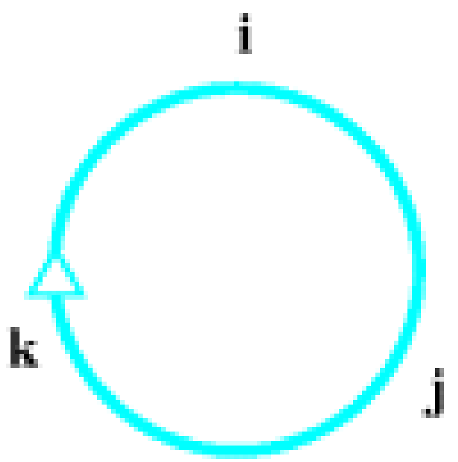
$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1)(a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) \\
&= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ja_1 c_2 + ka_1 d_2 \\
&\quad + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ijb_1 c_2 + ikb_1 d_2 \\
&\quad + jc_1 a_2 + jic_1 b_2 + j^2 c_1 c_2 + jkc_1 d_2 \\
&\quad + kd_1 a_2 + kid_1 b_2 + kjd_1 c_2 + k^2 d_1 d_2.
\end{aligned}$$

- Sulihkan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\
&+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\
&+ ijb_1 c_2 + ikb_1 d_2 + jic_1 b_2 + jkc_1 d_2 + kid_1 b_2 + kjd_1 c_2.
\end{aligned}
$$

- Namun, persamaan di atas masih tetap meninggalkan *ij*, *ik*, *ji*, *jk*, *ki*, dan *kj* yang tidak terdefinisi.

- Pada tanggal 16 Oktober, ketika Hamilton sedang berjalan kaki bersama istrinya di sepanjang kanal di Dublin, guna menuju acara pertemuan di *Royal Society of Dublin*, Hamilton menemukan solusi untuk memecahkan persoalan tersebut dengan menggunakan hasil perkalian silang antara vektor-vektor satuan standar i, j, dan k:



ij = k

jk = i

ki = j

ji = –k

kj = –i

ik = –j

- Hamilton menulis grafiti pada tembok kanal hasil penemuannya itu tulisan berikut: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

William Rowan Hamilton

Sulihkan nilai-nilai *ij* = *k*, *jk* = *i*, *ki* = *j*, *ji* = –*k*, *kj* = –*i*, *ik* = –*j* ke dalam persamaan yang terakhir:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\
&+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\
&+ ij b_1 c_2 + ik b_1 d_2 + ji c_1 b_2 + jk c_1 d_2 + ki d_1 b_2 + kj d_1 c_2.
\end{aligned}
$$

menghasilkan:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\
&+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\
&+ k b_1 c_2 - j b_1 d_2 - k c_1 b_2 + i c_1 d_2 + j d_1 b_2 - i d_1 c_2.
\end{aligned}
$$

- Susun ulang menjadi:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = a_1 a_2 &- (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\
&+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \\
&+ j(a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) \\
&+ k(a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2).
\end{aligned}
$$

- Hamilton menyebut quadruplets $z = a + bi + cj + dk$ itu sebagai "**quaternion**".

- Misalkan

$$z_1 = a_1 + \underbrace{b_1 i + c_1 j + d_1 k}_{\mathbf{v_1}} = a_1 + \mathbf{v_1} \qquad \text{(skalar + “vector”)}$$

$$z_2 = a_2 + \underbrace{b_2 i + c_2 j + d_2 k}_{\mathbf{v_2}} = a_2 + \mathbf{v_2} \qquad \text{(skalar + “vector”)}$$

maka

$$\boxed{z_1 z_2 = (a_1 + \mathbf{v_1})(a_2 + \mathbf{v_2}) = a_1 a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + a_1 \mathbf{v_2} + a_2 \mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}}$$

yang dalam hal ini,

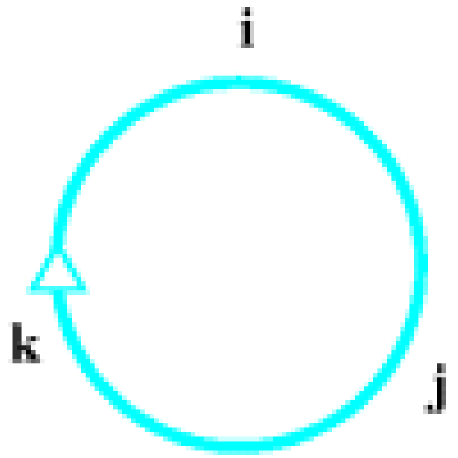
$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i - (b_1 d_2 - d_1 b_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k$$

Ringkasan:

1. Bilangan quaternion (atau "quaternion" saja) adalah gabungan skalar dengan vektor, berbentuk

$$q = a + \mathbf{v} = a + bi + cj + dk = (a, \mathbf{v})$$



2. $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$

3. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

4. Perkalian dua quaternion $z_1 = a_1 + \mathbf{v_1}$ dengan $z_2 = a_2 + \mathbf{v_2}$ adalah

$$z_1 z_2 = (a_1 + \mathbf{v_1})(a_2 + \mathbf{v_2}) = a_1 a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + a_1 \mathbf{v_2} + a_2 \mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$$

5. Di dalam aljabar vektor, *i*, *j*, dan *k* diubah menjadi vektor satuan **i**, **j**, dan **k** , demikian sebaliknya

Contoh 1: Diberikan dua buah quaternion $q_1 = 1 + 2i + 3j + 4k$ dan $q_2 = 2 - i + 5j - 2k$

Hitung penjumlahan dan perkalian kedua quaternion

<u>Jawaban</u>:

(i) penjumlahan: $q_1 + q_2 = (1 + 2i + 3j + 4k) + (2 - i + 5j - 2k) = 3 + I + 8j + 2k$

(ii) perkalian: $q_1q_2 = (a_1 + \mathbf{v_1})(a_2 + \mathbf{v_2}) = a_1a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + a_1\mathbf{v_2} + a_2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$

$v_1 = 2i + 3j + 4k$ dan $v_2 = - i + 5j - 2k$

$$q_1q_2 = (1 + 2i + 3j + 4k)(2 - i + 5j - 2k) = (1)(2) - \{(2)(-1)+(3)(5)+(4)(-2)$$

$$+ (1)(- i + 5j - 2k) + (2)(2i + 3j + 4k)$$

$$- 26i + 13k$$

$$= 2 - 5 - i + 5j - 2k + 4i + 6j + 8k - 26i + 13k$$

$$= -3 - 23i + 11j + 19k$$

$$\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} k$$

$$= (-6 - 20)i - (-4 + 4)j + (10 + 3)k = -26i + 13k$$

Perhatikan bahwa $q_2q_1 = -3 + 29i + 11j - 7k$

$$q_1q_2 \neq q_2q_1$$

Perkalian q_1q_2 dapat juga dihitung secara aljabar tanpa menggunakan rumus

$$q_1q_2 = (a_1 + \mathbf{v_1})(a_2 + \mathbf{v_2}) = a_1a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + a_1\mathbf{v_2} + a_2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$$

yaitu dengan cara mengalikan setiap elemen di dalam quaternion satu persatu sebagai berikut dan dengan mengingat bahwa

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$q_1q_2 = (1 + 2i + 3j + 4k)(2 - i + 5j - 2k)$$

$$= 2 - i + 5j - 2k + 4i - 2i^2 + 10ij - 4ik + 6j - 3ji + 15j^2 - 6jk + 8k - 4ki + 20kj - 8k^2$$

$$= 2 - i + 5j - 2k + 4i - 2(-1) + 10k - 4(-j) + 6j - 3(-k) + 15(-1) - 6i + 8k - 4j + 20(-i) - 8(-1)$$

$$= 2 - i + 5j - 2k + 4i + 2 + 10k + 4j + 6j + 3k - 15 - 6i + 8k - 4j - 20i + 8$$

$$= (2 + 2 - 15 + 8) + (-i + 4i - 6i - 20i) + (5j + 4j + 6j - 4j) + (-2k + 10k + 3k + 8k)$$

$$= -3 - 23i + 11j + 19k$$

- **Norma (*magnitude*) quaternion**

  Quaternion: q = a + bi + cj + dk

  Magnitude: $\boxed{\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$

Contoh: q = 1 + 2i + 3j + 4k $\rightarrow \|q\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4} = \sqrt{30}$

- **Quaternion satuan (unit)**

  Quaternion: q = a + bi + cj + dk

  Quaternion satuan: $\boxed{\hat{q} = \frac{1}{\|q\|}(a + bi + cj + dk)}$

Contoh: q = 1 + 2i + 3j + 4k $\rightarrow \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1 + 2i + 3j + 4k)$

- **Quaternion murni (*pure quaternion*)**

  Quaternion murni adalah quaternion dengan skalar nol

  $$q = \text{bi} + \text{cj} + \text{dk}$$

  Perkalian dua quaternion murni tidak bersifat tertutup, sebab hasilnya adalah quaternion yang tidak murni.

$$q_1 q_2 = (ix_1 + jy_1 + kz_1)(ix_2 + jy_2 + kz_2)$$

$$= [-(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + i(y_1z_2 - y_2z_1) + j(z_1x_2 - z_2x_1) + k(x_1y_2 - x_2y_1)]$$

- **Bilangan quaternion sekawan (*conjugate*)**

  quaternion: $q = \text{a} + \mathbf{v} = \text{a} + \text{bi} + \text{cj} + \text{dk}$

  conjugate: $\bar{q} = \text{a} - \mathbf{v} = \text{a} - \text{bi} - \text{cj} - \text{dk}$

Contoh: $q = 1 + 2\text{i} + 3\text{j} + 4\text{k} \rightarrow \bar{q} = 1 - 2\text{i} - 3\text{j} - 4\text{k}$

Dapat ditunjukkan bahwa $\boxed{q\bar{q} = \text{a}^2 + \text{b}^2 + \text{c}^2 + \text{d}^2}$

- **Balikan (*inverse*) quaternion**

Quaternion: q = a + bi + cj + dk

Balikan: $\boxed{q^{-1} = \dfrac{1}{q} = \dfrac{\bar{q}}{\|q\|^2}}$

Contoh: q = 1 + 2i + 3j + 4k $\rightarrow q^{-1} = \dfrac{1}{q} = \dfrac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \dfrac{1-2i-3j-4k}{\left\|\sqrt{30}\right\|^2}$

$$= \frac{1-2i-3j-4k}{30}$$

$$= \frac{1}{30} - \frac{1}{15}i - \frac{1}{10}j - \frac{2}{15}k$$

Dapat ditunjukkan bahwa: $\boxed{qq^{-1} = q^{-1}q = 1}$

Aksioma-aksioma di dalam Aljabar Quaternion

The axioms associated with quaternions are as follows:

Given $q, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{C}$:

Closure

For all q_1 and q_2

$$\text{addition} \quad q_1 + q_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{multiplication} \quad q_1 q_2 \in \mathbb{C}.$$

Identity

For each q there is an identity element $\mathbf{0}$ and $\mathbf{1}$ such that:

$$\text{addition} \quad q + \mathbf{0} = \mathbf{0} + q = q \; (\mathbf{0} = 0 + i0 + j0 + k0)$$

$$\text{multiplication} \quad q(\mathbf{1}) = (\mathbf{1})q = q \; (\mathbf{1} = 1 + i0 + j0 + k0).$$

Inverse

For each q there is an inverse element $-q$ and q^{-1} such that:

$$\text{addition} \quad q + (-q) = -q + q = 0$$

$$\text{multiplication} \quad qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \; (q \neq 0).$$

Associativity

For all q_1, q_2 and q_3

$$
\begin{aligned}
\text{addition} \quad & q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3 \\
\text{multiplication} \quad & q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3.
\end{aligned}
$$

Commutativity

For all q_1 and q_2

$$
\begin{aligned}
\text{addition} \quad & q_1 + q_2 = q_2 + q_1 \\
\text{multiplication} \quad & q_1q_2 \neq q_2q_1.
\end{aligned}
$$

Distributivity

For all q_1, q_2 and q_3

$$
\begin{aligned}
q_1(q_2 + q_3) &= q_1q_2 + q_1q_3 \\
(q_1 + q_2)q_3 &= q_1q_3 + q_2q_3.
\end{aligned}
$$

Latihan 1

1. Hitunglah

Problem 1. $(2+3i+j-k)+(4+5i-2j+6k)$

Problem 2. $(3+3i+2j+2k)-(6-4i+3j+5k)$

Problem 3. $(-2-\frac{1}{2}i-2j+\frac{2}{5}k)+(\frac{1}{3}+2i+\frac{1}{4}j+k)$

Problem 4. $(3+3i+5j+2k)(6+4i+j+k)$

Problem 5. $(8-2i+3j-k)(8+2i-3j+k)$

Problem 6. $\dfrac{1}{8-2i+3j-k}.$

Problem 7. $\dfrac{1}{-i+3j-5k}.$

2. Diberikan quarternion $q = 2 + 4i - 3j + 5k$ dan $r = -3 + 5i - 8j + 10k$.
Hitunglah :

a). qr b). $\frac{1}{r}$ *(nilai 20)*

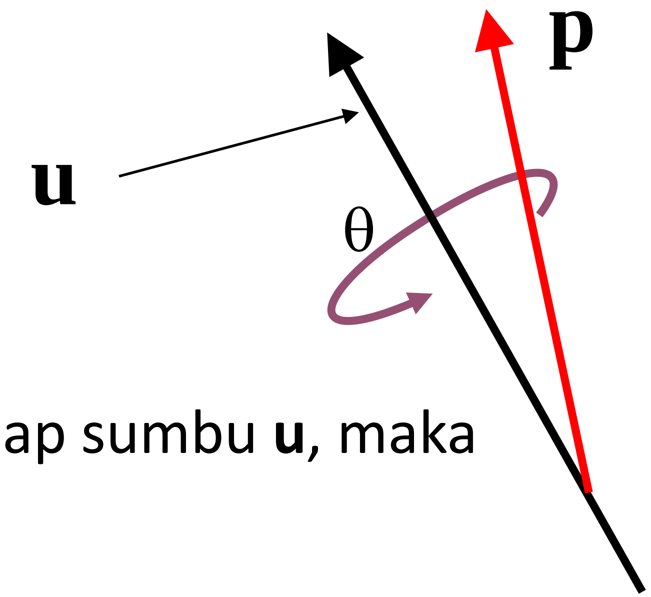
3. Diberikan dua quaternion $p = 2 + 2i + 3j + 4k$ dan $q = 3 - i + 5j - 2k$,
hitunglah :

1). $2p - 3q$
2). $(p + q)(p + q)^{-1}$
3). $(p\,q)(p\,q)^{-1}$.

4. Diberikan dua quaternion $z_1 = 10 + 3i - 5j + 6k$ dan $z_2 = 5 - 2i + 4j + 7k$,
hitunglah:

a). z_1^{-1} dan z_2^{-1}
b). $z_1\,z_2$
c). $z_1\,z_2^{-1}$.

Rotasi Vektor dengan Quaternion



- Misalkan **p** adalah sebuah vektor di R^3
- Vektor **p** diputar sejauh θ berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu **u**, maka bayangannya adalah **p**', yang dihitung dengan persamaan:

$$\boxed{\mathbf{p}' = q\mathbf{p}q^{-1}}$$

yang dalam hal ini,

$$\mathrm{p} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$$

$$p = 0 + ix + jy + kz$$

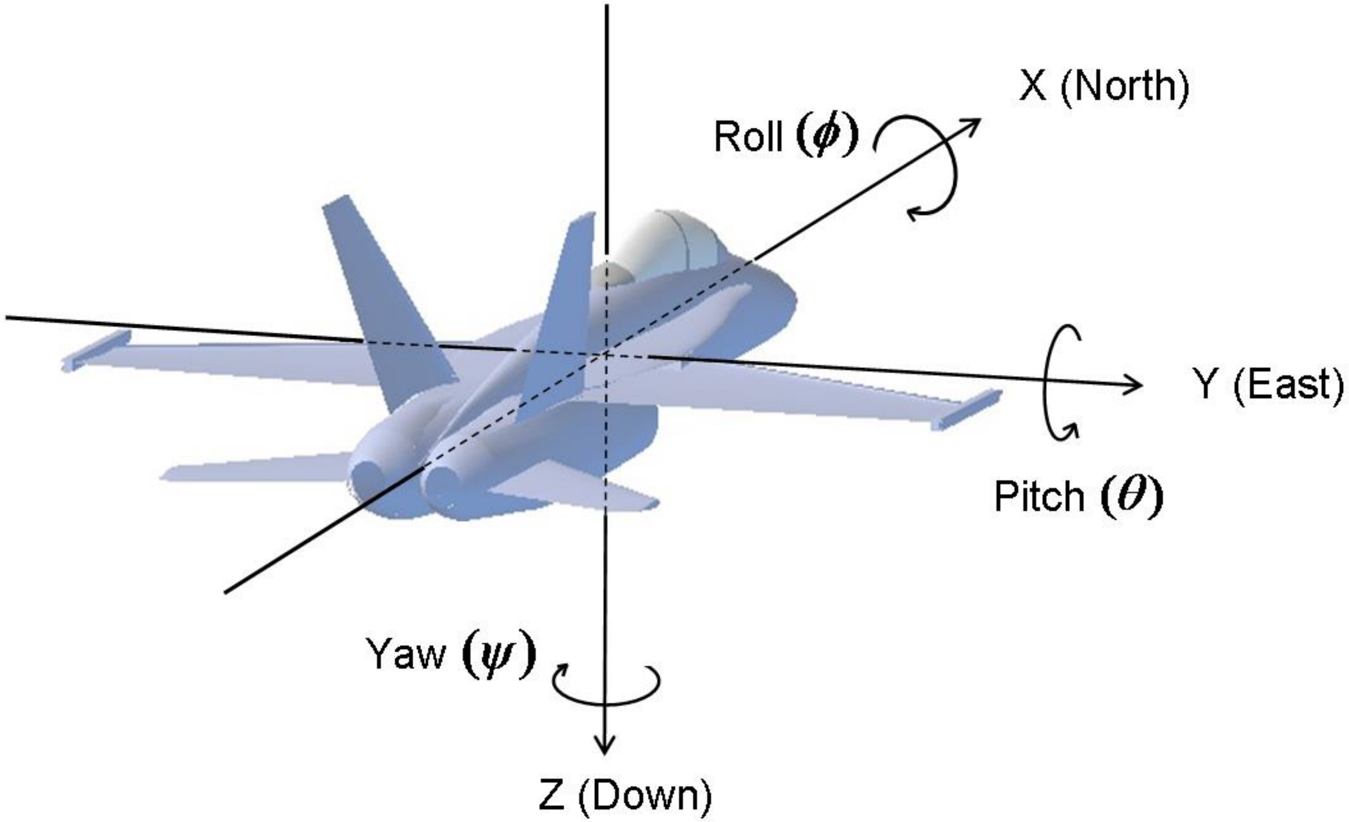
$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{\mathrm{u}}$$

$$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\hat{\mathrm{u}}$$

$\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor satuan dari vektor **u** = xi + y**j** + z**k**

$$\hat{\mathbf{u}} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

dengan $||\hat{\mathbf{u}}|| = 1$



Sumber gambar: http://www.chrobotics.com/library/understanding-quaternions

Contoh 2: Misalkan sebuah titik P(0, 1, 1), atau sebagai vektor **p** = (0, 1, 1), diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $\theta = 90°$ dengan sumbu rotasinya adalah **u** = *j*. Tentukan vektor bayangannya.

<u>Jawaban</u>:

u = **j**, panjangnya sama dengan satu, maka vektor satuannya juga sama yaitu $\hat{\mathbf{u}} = j$

p = (0, 1, 1) = 0**i** + **j** + **k**

Nyatakan **p** dalam quaternion $\rightarrow$ $p = 0 + 0i + j + k$

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 45° + \sin 45°(0i + j + 0k)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(0i + j + 0k) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + 0i + j + 0k)$$

$$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 45° - \sin 45°(0i + j + 0k)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(0i + j + 0k) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0i - j - 0k)$$

Bayangan vektor **p** adalah **p'**:

$$\mathbf{p}' = q\mathbf{p}q^{-1}$$

Dalam bentuk perkalian quaternion:

$$p' = qpq^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + 0i + j + 0k)(0 + 0i + j + k)\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0i - j - 0k)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \quad + i + j + k)\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 0i - j - 0k)$$

$$= \frac{1}{2}(-1 \;\; + 1 + j + i + j + k \;\; + i - k)$$

$$= \frac{1}{2}(0 \;\; + 2i + 2j + 0k)$$

$$= 0 + i + j + 0k$$

Jadi, **p'** = (1, 1, 0) = **i** + **j**

Contoh 3 (Soal UAS 2019): Misalkan sebuah vektor **p** = 2**i** – 4**j** + 5**k** diputar berlawanan arah jarum jam sejauh θ = 120° dengan sumbu rotasinya adalah **u** = **i** + **j** + **k**. Tentukan vektor bayangannya.

<u>Jawaban</u>:

u = **i** + **j** + **k**, panjangnya = $\sqrt{3}$, maka vektor satuannya $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (**i** + **j** + **k**)

p = (2, –4, 5) = 2**i** – 4**j** + 5**k**

Nyatakan **p** dalam quaternion $\rightarrow$ p = 0 + 2i – 4j + 5k

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 60^\circ + \sin 60^\circ\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k) = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$$

$$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 60^\circ - \sin 60^\circ\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\right) = \frac{1}{2}(1 - i - j - k)$$

Bayangan vektor **p** adalah **p'**:

$$\mathbf{p}' = q\mathbf{p}q^{-1}$$

Dalam bentuk perkalian quaternion:

$$p' = qpq^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i + j + k)(0 + 2i - 4j + 5k)\,\frac{1}{2}\,(1 - i - j - k)$$

$$= \frac{1}{2}\,(11i - 7j - k - 3)\,\frac{1}{2}\,(1 - i - j - k)$$

$$= \frac{1}{4}(20i + 8j - 16k + 0)$$

$$= 0 + 5i + j - 4k$$

Jadi, **p'** = (5, 1, –4) = 5**i** + **j** – 4**k**

Latihan 2

(Soal UAS 2015)

Diketahui sebuah titik P=(1,1,1) diputar terhadap sumbu $\mathbf{u} = j + k$ sebesar 180^o, tentukan koordinat titik P' yang merupakan hasil dari rotasi tersebut.

Quaternion di dalam Bahasa Python

- **Instalasi paket** `pyquaternion`**:**

```
pip install pyquaternion
```

- **Gunakan paket** `pyquaternion`**:**

```
from pyquaternion import Quaternion
```

- **Buat (*create*) objek quaternion, ada banyak cara:**

```
q1 = Quaternion(scalar=1.0, vector=(0., 0., 0.))
q2 = Quaternion(scalar=1.0, vector=[0., 0., 0.])
q3 = Quaternion(scalar=1.0, vector=np.array([0., 0., 0.]))
q4 = Quaternion([1., 0., 0., 0.])
q5 = Quaternion((1., 0., 0., 0.))
q6 = Quaternion(np.array([1.0, 0., 0., 0.]))
```

Semuanya mengahsilkan quaternion: q = 1 + 0i + 0j + 0k

- **Hitung norma (magnitude) quaternion**

```
q7 = Quaternion(np.array([1., 0., 0., 0.]))
print(q7.norm)
1.0
print(q7.magnitude)
1.0
```

- **Hitung balikan (inverse) quaternion**

```
print(q7.inverse)
1.000 -0.000i -0.000j -0.000k
```

- **Hitung *conjugate* quaternion**

```
print(q7.inverse)
1.000 -0.000i -0.000j -0.000k
```

- **Hitung quaternion satuan (atau menormalisasi quaternion):**

```
q8 = Quaternion(np.array([2.0, 1., 1., 1.]))
print(q8.normalised)
0.756 +0.378i +0.378j +0.378k
```

Contoh kode program rotasi vector dengan quaternion

```
import roslib
roslib.load_manifest('tf')
import tf from tf.transformations import *

# we want to rotate the point using the x-axis ("roll")
rot=quaternion_from_euler(-numpy.pi/4,0,0)

# the object is located in the y=1. We use the format [x,y,z,w] and w is allways 0 for
# vectors
vec= [0,1,0,0]

#now we apply the mathematical operation res=q*v*q'. We use this #function
#for multiplication but internally it is just a complex #multiplication #operation.
result=quaternion_multiply(quaternion_multiply(rot,  vec),quaternion_conjugate(rot))
```

Sumber kode: https://geus.wordpress.com/2012/02/16/basic-rotations-with-quaternions/